授業資料

2年　2組　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

ŒUVRES DE FERMAT

PUBLIÉES PAR LES SOINS DE

MM. PAUL TANNERY ET CHARLES HENRY

SOUS LES AUSPICES

DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

TOME PREMIER.

ŒUVRES MATHÉMATIQUES DIVERSES. — OBSERVATIONS SUR DIOPHANTE.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

M DCCC XCI

授業者：筑波大学大学院修士１年
井野口　浩

§０　接線法、接線問題

接線法、接線問題とは、曲線に接線を引く問題である。

フェルマー以前に接線法、接線問題を考えていた人たち

ユークリッド(B.C.400〜350 頃)
・・・『原論』にて、【与えられた点から与えられた円に接線をひくこと】についての記述

アルキメデス(B.C.287〜212 頃)
・・・『方法』にて、螺線に対して、接線をひくことについての記述

アポロニウス(B.C.262〜190 頃)
・・・『円錐曲線論』の【法線論】にて、放物線、楕円、双曲線の法線(接線)をひくことについての記述

特定の曲線に対して、接線をひくことは可能になったが、平面上のいかなる曲線に対して、接線を作図する方法は、考えられていなかった。

I.

METHODUS

AD

DISQUIRENDAM MAXIMAM ET MINIMAM [1].

Omnis de inventione maximæ et minimæ doctrina duabus positionibus in notis innititur et hac unica præceptione :

Statuatur quilibet quæstionis terminus esse *A* (sive planum, sive solidum aut longitudo, prout proposito satisfieri par est) et, inventâ maximâ aut minimâ in terminis sub *A*, gradu $<$ aut gradibus $>$, ut libet, involutis, ponatur rursus idem qui prius terminus esse $A+E$, iterumque inveniatur maxima aut minima in terminis sub *A* et *E* gradibus, ut libet, coefficientibus. Adæquentur, ut loquitur Diophantus [2], duo homogenea maximæ aut minimæ æqualia et, demptis communibus (quo peracto, homogenea omnia ex parte alterutra ab *E* vel ipsius gradibus afficiuntur), applicentur omnia ad *E* vel ad elatiorem ipsius gradum, donec aliquod ex homogeneis, ex parte utravis,

(1) Cet écrit, envoyé, par l'intermédiaire de Mersenne, à Descartes, qui le reçut vers le 10 janvier 1638, devint dès lors, entre Fermat et l'auteur de la *Géométrie*, le principal thème de la polémique déjà ouverte à propos de la *Dioptrique*.

Le second alinéa se retrouve intégralement vers la fin de l'écrit IV suivant. Les additions entre crochets — *aut gradibus* (ligne 3 de l'alinéa); *sub* (page 134, ligne 2) — sont empruntées à cette seconde rédaction et ne doivent pas avoir figuré dans la première. Les seules autres divergences correspondent aux leçons suivantes du texte postérieur : page 134, lignes 1, 2, 3 « *Elisis*.. *homogeneis*...... *involutis, reliqua* » — ligne 4 : « *istius ultimæ* ».

(2) Diophante emploie (V, 14 et 17), dans un but spécial et pour désigner une égalité approximative, les termes de παρισότης et de πάρισον, que Xylander et Bachet ont traduits par *adæqualitas* et *adæqualis*.

affectione sub *E* omnino liberetur. Elidantur deinde utrimque homogenea sub *E* aut $<$ sub $>$ ipsius gradibus quomodolibet involuta, et reliqua æquentur, aut, si ex una parte nihil superest, æquentur sane, quod eodem recidit, negata affirmatis. Resolutio ultimæ istius æqualitatis dabit valorem *A*, quâ cognitâ, maxima aut minima ex repetitis prioris resolutionis vestigiis innotescet.

Exemplum subjicimus : *Sit recta* AC (*fig.* 91) *ita dividenda in* E *ut rectangulum* AEC *sit maximum.*

Fig. 91.

Recta AC dicatur *B*. Ponatur pars altera ipsius *B* esse *A* : ergo reliqua erit $B-A$, et rectangulum sub segmentis erit B in $A-Aq.$, quod debet inveniri maximum. Ponatur rursus pars altera ipsius *B* esse $A+E$: ergo reliqua erit $B-A-E$, et rectangulum sub segmentis erit

$$B \text{ in } A - Aq. + B \text{ in } E - A \text{ in } E \text{ bis} - Eq.,$$

quod debet adæquari superiori rectangulo

$$B \text{ in } A - Aq.$$

Demptis communibus,

$$B \text{ in } E \quad \text{adæquabitur} \quad A \text{ in } E \text{ bis} + Eq.,$$

et, omnibus per *E* divisis,

$$B \quad \text{adæquabitur} \quad A \text{ bis} + E.$$

Elidatur *E*,

$$B \quad \text{æquabitur} \quad A \text{ bis}.$$

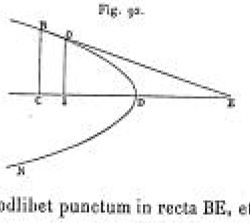
Igitur *B* bifariam est dividenda ad solutionem propositi; nec potest generalior dari methodus.

DE TANGENTIBUS LINEARUM CURVARUM.

Ad superiorem methodum inventionem tangentium ad data puncta in lineis quibuscumque curvis reducimus.

Sit data, verbi gratia, *parabole* BDN (*fig.* 92), cujus vertex D, diameter DC, et punctum in ea datum B, ad quod ducenda est recta BE tangens parabolen et in puncto E cum diametro concurrens.

Fig. 92.



Ergo, sumendo quodlibet punctum in recta BE, et ab eo ducendo ordinatam OI, a puncto autem B ordinatam BC, major erit proportio

CD ad DI quam quadrati BC ad quadratum OI,

quia punctum O est extra parabolen; sed, propter similitudinem triangulorum,

ut BC quadratum ad OI quadratum, ita CE quadratum ad IE quadratum :

major igitur erit proportio

CD ad DI quam quadrati CE ad quadratum IE.

Quum autem punctum B detur, datur applicata BC, ergo punctum C; datur etiam CD : sit igitur CD æqualis *D* datæ. Ponatur CE esse *A* : ponatur CI esse *E*.

Ergo

$$D \text{ ad } D-E \text{ habebit majorem proportionem}$$
$$\text{quam } Aq. \text{ ad } Aq. + Eq. - A \text{ in } E \text{ bis}.$$

Et, ducendo inter se medias et extremas,

$$D \text{ in } Aq. + D \text{ in } Eq. - D \text{ in } A \text{ in } E \text{ bis} \quad \text{majus erit quam} \quad D \text{ in } Aq. - Aq. \text{ in } E.$$

Adæquentur igitur juxta superiorem methodum : demptis itaque communibus,

$$D \text{ in } Eq. - D \text{ in } A \text{ in } E \text{ bis} \quad \text{adæquabitur} \quad -Aq. \text{ in } E,$$

aut, quod idem est,

$$D \text{ in } Eq. + Aq. \text{ in } E \quad \text{adæquabitur} \quad D \text{ in } A \text{ in } E \text{ bis}.$$

Omnia dividantur per *E* : ergo

$$D \text{ in } E + Aq. \quad \text{adæquabitur} \quad D \text{ in } A \text{ bis}.$$

Elidatur *D* in *E* : ergo

$$Aq. \quad \text{æquabitur} \quad D \text{ in } A \text{ bis},$$

ideoque

$$A \quad \text{æquabitur} \quad D \text{ bis}.$$

Ergo CE probavimus duplam ipsius CD, quod quidem ita se habet.

Nec unquam fallit methodus; imo ad plerasque quæstiones pulcherrimas potest extendi; ejus enim beneficio centra gravitatis [1] in figuris lineis curvis et rectis comprehensis et in solidis invenimus, et multa alia, de quibus fortasse aliàs, si otium suppetat.

De quadraturis spatiorum sub lineis curvis et rectis contentorum, imo et de proportionibus solidorum ab eis ortorum ad conos ejusdem basis et altitudinis, fuse jam cum Domino de Roberval egimus [2].

§ 1　フェルマーの接線法

フェルマーの接線法をする前に、極大・極小の問題をみてみよう。

Exemplum subjicimus : *Sit recta* AC (*fig.* 91) *ita dividenda in* E *ut rectangulum* AEC *sit maximum.*

Fig. 91.

Recta AC dicatur B. Ponatur pars altera ipsius B esse A : ergo reliqua erit $B - A$, et rectangulum sub segmentis erit B in $A - Aq.$, quod debet inveniri maximum. Ponatur rursus pars altera ipsius B esse $A + E$: ergo reliqua erit $B - A - E$, et rectangulum sub segmentis erit

$$B \text{ in } A - Aq. + B \text{ in } E - A \text{ in } E \text{ bis} - Eq.,$$

quod debet adæquari superiori rectangulo

$$B \text{ in } A - Aq.$$

Demptis communibus,

$$B \text{ in } E \quad \text{adæquabitur} \quad A \text{ in } E \text{ bis} + Eq.,$$

et, omnibus per E divisis,

$$B \quad \text{adæquabitur} \quad A \text{ bis} + E.$$

Elidatur E,

$$B \quad \text{æquabitur} \quad A \text{ bis}.$$

Igitur B bifariam est dividenda ad solutionem propositi : nec potest generalior dari methodus.

『OEUVRES de FERMAT』【Methodus ad Disquirebdam Maxima et Minimam】

フェルマーの接線法

先ほど行った問題と同様な方法を使って、曲線のある点を通る接線をみつけよう。

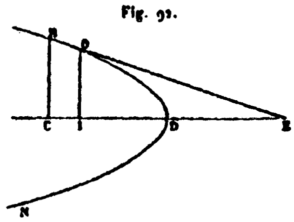
〔出典〕 『OEUVRES de FERMAT』
【Methodus ad Disquirendam Maximam et minimam】

DE TANGENTIBUS LINEARUM CURVARUM.

Ad superiorem methodum inventionem tangentium ad data puncta *in lineis quibuscumque curvis reducimus.*

Sit data, verbi gratia, *parabole* BDN (*fig.* 92), cujus vertex D, diameter DC, et punctum in ea datum B, ad quod ducenda est recta BE tangens parabolen et in puncto E cum diametro concurrens.

Fig. 92.



Ergo, sumendo quodlibet punctum in recta BE, et ab eo ducendo ordinatam OI, a puncto autem B ordinatam BC, major erit proportio

CD ad DI quam quadrati BC ad quadratum OI,

quia punctum O est extra parabolen; sed, propter similitudinem triangulorum,

ut BC quadratum ad OI quadratum, ita CE quadratum ad IE quadratum :

major igitur erit proportio

CD ad DI quam quadrati CE ad quadratum IE.

Quum autem punctum B detur, datur applicata BC, ergo punctum C; datur etiam CD : sit igitur CD æqualis D datæ. Ponatur CE esse A; ponatur CI esse E.

Ergo

D ad $D - E$ habebit majorem proportionem
quam $Aq.$ ad $Aq. + Eq. - A$ in E bis.

Et, ducendo inter se medias et extremas,

D in $Aq. + D$ in $Eq. - D$ in A in E bis majus erit quam D in $Aq. - Aq.$ in E.

Adæquentur igitur juxta superiorem methodum : demptis itaque communibus,

D in $Eq. - D$ in A in E bis adæquabitur $-Aq.$ in E,

aut, quod idem est,

D in $Eq. + Aq.$ in E adæquabitur D in A in E bis.

Omnia dividantur per E : ergo

D in $E + Aq.$ adæquabitur D in A bis.

Elidatur D in E : ergo

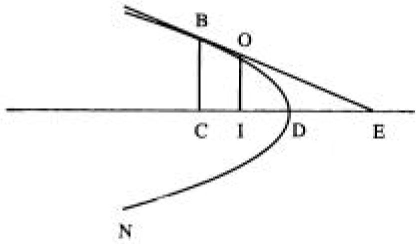
$Aq.$ æquabitur D in A bis,

ideoque

A æquabitur D bis.

Ergo CE probavimus duplam ipsius CD, quod quidem ita se habet.

＜日本語訳＞



第１図

図のごとく放物線 BDN があり，頂点は D，DC がそれの軸である．いまその曲線上の一点 B に接線 BE が描かれ，それと軸との交点を E とする．接線 BE 上に任意に一点 O をとり，そこから縦線 OI をつくり，また同時に B にも縦線 BC を描けば

$$\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{DI}} > \frac{\mathrm{BC}^2}{\mathrm{OI}^2} \qquad (*)$$

である．この式は，O が接線上の一点であるがために放物線の外側にあることと，放物線の特性から，容易に導出できる．ところで三角形の相似性から $\frac{\mathrm{BC}^2}{\mathrm{OI}^2} = \frac{\mathrm{CE}^2}{\mathrm{IE}^2}$ であり，それ故に $\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{DI}} > \frac{\mathrm{CE}^2}{\mathrm{IE}^2}$ である．さて B 点は所与であり，故に BC も，また点 C も，さらにまた CD も与えられている．かくて CD = b は所与である．いま CE = a，CI = e とおけば

$$\frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{a^2+e^2-2ae} \qquad (*)$$

$$\therefore\ da^2+de^2-2dae > da^2-a^2e.$$

ここでいつもの方法で adégalér して共通項を相殺すれば

$$de^2-2dae \backsim -a^2e$$
$$de^2+a^2e \backsim 2dae.$$

e で全体をわると

$$de+a^2 \backsim 2da$$

となり，de を除去すれば $a^2=2da$ が残り，かくして $a=2d$ である．故に CE は CD の二倍であり，接線は直ちに描けるわけである．

近藤洋逸数学史著作集第 3 巻より抜粋

≪ヒント≫

放物線の式より $kBC^2 = CD \Leftrightarrow k = \dfrac{CD}{BC^2}$

（1）

$$kOI^2 > DI \Leftrightarrow k > \frac{DI}{OI^2}$$

よって、

$$\frac{CD}{BC^2} > \frac{DI}{OI^2}$$

つまり、

$$\frac{CD}{DI} > \frac{BC^2}{OI^2}$$